

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

10 класс. Решения

Задача 1. У профессора в пробирке находятся бактерии. Известно, что их не более, чем 2019. Каждый день, если число бактерий в пробирке делится на 100, то оно уменьшается в 100 раз; если же не делится, то число бактерий уменьшается на 1. Какое наибольшее количество бактерий может находиться в пробирке спустя 50 дней?

Ответ: 1949.

Решение. Разберём два случая: когда изначальное количество бактерий больше либо равно 2000, и когда оно меньше либо равно 1999. В первом случае в какой-то момент количество бактерий достигнет 2000 и уменьшится до 20. Итоговое число бактерий не будет превосходить 20.

Во втором случае количество бактерий будет уменьшаться хотя бы на 1 каждый день, и в итоге не может оказаться больше 1949. Эта оценка достигается: чтобы получить 1949 бактерий через 50 дней, можно начать с 1999 бактерий.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

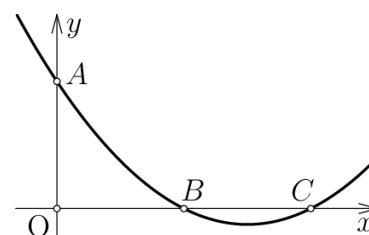
6 б. В целом верное рассуждение, в котором допущена несущественная арифметическая ошибка.

5 б. В целом верное рассуждение, в котором допущена арифметическая ошибка, влияющая на ответ.

3 б. Приведён верный ответ, но нет дальнейших продвижений.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Oy в точке A , а ось Ox — в точках B и C , как изображено справа. Известно, что $OA = OB = BC$. Укажите все возможные значения, которые может принимать коэффициент b .



Ответ: $-\frac{3}{2}$.

Решение. Пусть $OA = OB = BC = t$. Тогда наша функция имеет вид $a(x - t)(x - 2t)$. Раскрыв скобки, обнаруживаем, что коэффициент при x равен $-3at$. Подставив в функцию значение $x = 0$, при котором она должна принимать значение t , получаем $2at^2 = t$, откуда $at = \frac{1}{2}$. Тогда $b = -3at = -\frac{3}{2}$.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

5 б. В целом верное рассуждение, в котором допущена несущественная арифметическая ошибка или потерян знак.

3 б. Доказано, что $2at^2 = t$, но дальнейших продвижений нет.

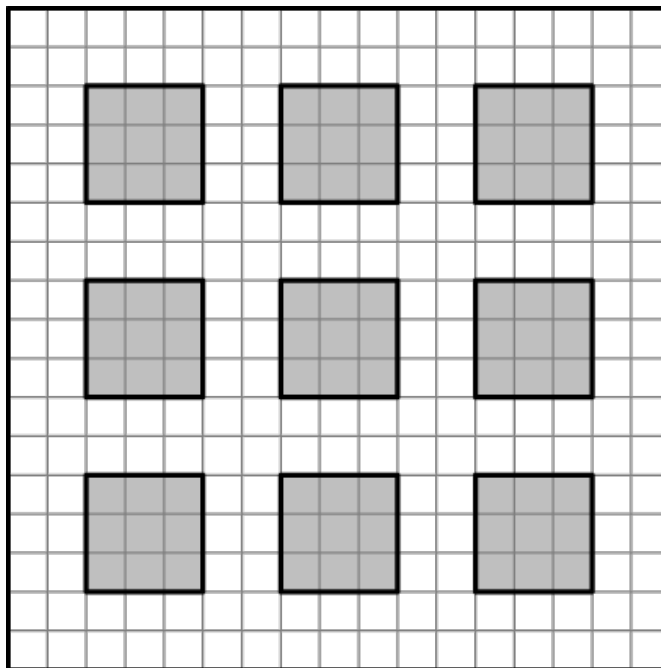
1 б. Приведён верный ответ, но нет дальнейших продвижений.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. Какое наименьшее количество клетчатых квадратов 3×3 можно вырезать из клетчатой доски 17×17 так, чтобы невозможно было вырезать больше ни одного квадрата 3×3 ?

Ответ: 9.

Решение. Выделим девять квадратов 3×3 , как показано на рисунке.



Пример. Заметим, что если мы вырежем эти квадраты, то невозможно будет вырезать больше ни одного квадрата 3×3 .

Оценка. Нетрудно увидеть, что любой квадрат 3×3 , расположенный на доске, будет пересекать ровно один из выделенных квадратов. Предположим, что существует способ вырезать не более 8 квадратов так, что больше не получится вырезать ни одного квадрата. Тогда хотя бы один из выделенных на рисунке квадратов не будет затронут, и мы можем его вырезать. Противоречие.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

4 б. Доказано, что если вырезать не более 8 квадратов, то можно будет вырезать ещё хотя бы один квадрат.

3 б. Приведён пример вырезания 9 квадратов так, чтобы выполнялось условие задачи.

1 б. Приведён верный ответ, но нет дальнейших продвижений.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. На столе лежат 2019 монет, первоначально все монеты лежат орлами вверх. Петя и Вася играют в следующую игру: они по очереди переворачивают по одной монете, начинает Петя. Проигрывает тот, после чьего хода повторилась ситуация, которая уже встречалась в игре (включая первоначальную). Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя.

Решение. Пусть Петя всегда просто переворачивает первую монетку. Заметим, что все возможные ситуации разбиваются на пары отличающихся состоянием первой монетки. Теперь, если Вася придёт впервые в некоторую ситуацию из такой пары, Петя сразу же перейдёт во вторую ситуацию из этой пары, и больше Вася в эту пару ситуаций вернуться не сможет. Это означает, что на каждом ходу Вася (если он может ходить) будет переходить в новую пару, и у Пети всегда будет ход.

Критерии.

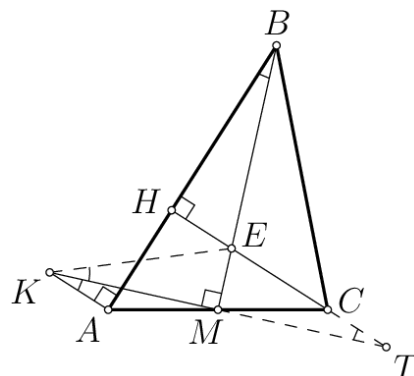
7 б. Приведено полное обоснованное решение.

5 б. Описана верная стратегия, но отсутствует её обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC медиана BM и высота CH пересекаются в точке E . Точка K лежит на описанной окружности треугольника ABM , и она диаметрально противоположна точке B . Докажите, что углы ABM и EKM равны.

Решение. Продлим отрезок KM на свою длину за точку M и отметим точку T . Ясно, что четырёхугольник $KATC$ — параллелограмм (его диагонали пересекаются в своих серединах). Это означает, что точка T попала на прямую CH , так как $CH \parallel AK$ ($CH \perp BA$ по условию, и $AK \perp BA$, так как B и K — диаметрально противоположные). Получаем равенство углов $\angle ETM = \angle AKM$. Кроме того, из вписанности четырёхугольника $BMAK$ следует, что $\angle AKM = \angle ABM$.



С другой стороны, EKT — равнобедренный треугольник, так как EM является его высотой и медианой (прямой угол опять следует из того, что BK — диаметр). Получаем $\angle EKM = \angle ETM$. Объединив полученные равенства углов в цепочку, получаем требуемое.

Замечание. Возможно также другое расположение точек: точка K может оказаться на дуге AM окружности. В этом случае первые два из полученных равенств углов переписываются соответственно как $\angle ETM = 180^\circ - \angle AKM$ и $180^\circ - \angle AKM = \angle ABM$.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

7 б. Задача решена только для одного из расположений точки K .

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. Сколько существует разбиений доски 2020×2019 (2020 строк и 2019 столбцов) на прямоугольники 3×2 таких, что каждая строка доски пересекает одинаковое количество вертикально расположенных прямоугольников 3×2 ? (Прямоугольники 3×2 можно поворачивать. Вертикально расположенный прямоугольник 3×2 содержится в двух столбцах и в трёх строках.)

Ответ: 1.

Решение. Докажем, что условие может быть выполнено, только если ни одного вертикального прямоугольника нет. Обозначим количество вертикально расположенных прямоугольников, верхние две клетки которых содержатся в i -й строке, за a_i , где $i = 1, 2, \dots, 2018$ (строки считаются сверху). Тогда первая строка пересекает a_1 прямоугольников, вторая — $a_1 + a_2$, третья — $a_1 + a_2 + a_3$, ..., i -я пересекает $a_{i-2} + a_{i-1} + a_i$ прямоугольников, ..., предпоследняя пересекает $a_{2017} + a_{2018}$ прямоугольников, последняя пересекает a_{2018} прямоугольников.

Составим систему уравнений $a_1 = a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 = \dots = a_{2016} + a_{2017} + a_{2018} = a_{2017} + a_{2018} = a_{2018}$.

Из первых двух равенств ясно, что $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$. Подставляя это в последующие выражения, получаем $a_1 = a_4 = a_4 + a_5 = a_4 + a_5 + a_6 = a_5 + a_6 + a_7 = \dots$.

Теперь мы можем получить $a_5 = 0$ и $a_6 = 0$. Продолжая так и далее, приходим в конце к $a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{2017} = a_{2017} + a_{2018} = a_{2017} + a_{2018} = a_{2018}$.

Отсюда ясно, что $a_{2017} = a_{2018} = 0$. Нулю тогда равны и все остальные переменные a_i .

С другой стороны, разбить доску на горизонтальные прямоугольники 2×3 нетрудно, ведь количество строк делится на 2, а количество столбцов — на 3.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

3 б. Доказано, что первые две строки пересекают одни и те же вертикальные прямоугольники 3×2 , или доказано любое эквивалентное утверждение, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Приведён пример разбиения и/или верный ответ, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.