Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

11 класс, решения

Задача 1. Существуют ли три таких ненулевых действительных числа a, b и c, что все три уравнения $ax^2 + b = 0$, $bx^2 + c = 0$ и $cx^2 + a = 0$ имеют решения?

Ответ: нет.

Решение. Заметим, что уравнение $ax^2 + b = 0$ имеет решение только если числа a и b разных знаков. Но среди чисел a, b и c найдутся хотя бы два одного знака. Соответствующее уравнение корней иметь не будет.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

5 б. Доказано, что a и b разных знаков, или любое другое эквивалентное утверждение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Оказалось, что угол AMB равен $60°$. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка D такая, что $AD = BM$. Докажите, что треугольник CBD равнобедренный.

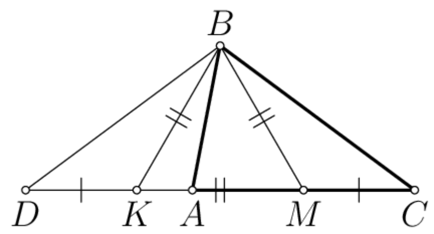
Решение. Пусть $AM = MC = a$, $AD = BM = b$. Запишем теорему косинусов для треугольников DBM и MBC.

Треугольник DBM:
$BD^2 = DM^2 + BM^2 - 2BM \cdot DM \cdot cos60° = (a + b)^2 + b^2 - 2b \cdot (a + b) \cdot cos60° = a^2 + b^2 + ab.$

Треугольник BMC:
$BC^2 = CM^2 + BM^2 - 2BM \cdot CM \cdot cos120° = a^2 + b^2 - 2b \cdot a \cdot cos120° = a^2 + b^2 + ab.$

Из этого мы делаем вывод, что $BD = BC. BD = BC.$

Другое решение. Пусть $AM = MC = a$, $AD = BM = b$. Отметим на отрезке DM точку K такую, что $KM = b$. Тогда треугольник BKM — равносторонний. Кроме этого, $KD = DM - KM = (a + b) - b = a$.



Получается, что треугольники DKB и CMB равны по первому признаку равенства треугольников ($BK = BM = b$, $DK = CM = a$, углы DKM и CMB равны по $120°$). Следовательно,$BD = BC$.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

2 б. Отмечена точка K.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. Стоимость одной акции фирмы «Рога и копыта» в начале составляла 1 рубль. Каждый следующий день она либо утраивалась, либо увеличивалась на 1 рубль. Спустя 100 дней акция стала стоить 2019 рублей. Могло ли так оказаться, что за эти 100 дней стоимость акции утраивалась ровно 5 раз?

Ответ: не могло.

Решение. Стоимость акций меняла свою чётность ровно столько раз, сколько раз она увеличивалась на 1 (при утраивании чётность не меняется). Так как чётность в итоге не поменялась, то 95 увеличений на 1 быть не могло.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

3 б. Присутствует идея рассмотрения чётности последовательности чисел, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. Алёна разбила все натуральные числа от 1 до 2019 на 450 групп. Затем она вычислила произведения чисел в каждой группе и посчитала сумму цифр каждого получившегося произведения. Могла ли Алёна получить 450 одинаковых чисел?

Ответ: не могла.

Решение. Предположим, что она действительно получила равные суммы цифр. Заметим, что некоторые из произведений делились на 9 (ведь среди чисел от 1 до 2019 есть кратные девяти). Их суммы цифр тоже делились на 9. Раз все суммы цифр одинаковые, то вообще все произведения делились на 9.

Чисел от 1 до 2019, кратных 9, всего 224. Значит, как минимум в 226 произведениях нет сомножителей, кратных 9, то есть там должно быть по паре чисел, кратных 3. Однако всего чисел, кратных 3, у нас имеется 673; 224 из них кратны 9, то есть остается 449. На 226 пар не хватит.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

5-6 б. В целом верное рассуждение, но присутствуют арифметические ошибки, не влияющие на ход решения.

2 б. В решение присутствует идея рассмотрения количества чисел кратных 3 или 9, но дальнейших продвижений нет.

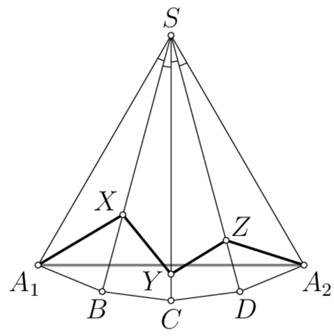
0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равно 1, а плоские углы при вершине S равны по $15°$. Точки X, Y, Z отмечены на ребрах SB, SC, SD соответственно. Какое минимальное значение может принимать сумма $AX + XY + YZ + ZA$?

Ответ: 1.

Решение. Выкинем основание пирамиды и разрежем её по ребру SA. Получится развёртка, которую мы положим на плоскость. (Образы точки A обозначим за A_1 и A_2 так, чтобы A_1SB и

A_2SD были гранями на развёртке.) Ясно, что длина ломаной A_1XYZA_2 на развёртке равна длине ломаной $AXYZA$ в исходной конструкции. С другой стороны, длина этой ломаной не может превосходить длины отрезка A_1A_2. Так как угол A_1SA_2 равен $4 \cdot 15° = 60°$, то треугольник A_1SA_2 равносторонний, и $A_1A_2 = 1$.



Привести пример легко: достаточно провести отрезок A_1A_2 и отметить X, Y, Z в его точках пересечения с отрезками SB, SC, SD соответственно, а потом «свернуть» пирамиду из развёртки обратно.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

4 б. Рассматривается развёртка, аналогичная указанной в решении задачи, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. Докажите, что число способов разрезать клетчатую доску 6×7 на трёхклеточные уголки — чётно.

Решение. Рассмотрим ось симметрии, делящую прямоугольник на 2 равные части — прямоугольники $6 \times 3{,}5$.

Пусть у нас есть какое-то разрезание прямоугольника 6×7 на уголки. Заметим, что разбиение, симметричное данному относительно выбранной оси симметрии будет отличным от первоначального (так как в любом разбиении есть уголки, пересекающие ось симметрии; при этом они, очевидно, не симметричны относительно этой оси). Тогда все разрезания разбиваются на пары.

Замечание. Симметрия относительно другой оси, делящей прямоугольник на два прямоугольника 3×7, не работает, так как есть разбиения, симметричные относительно неё.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.