Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

7 класс. Решения

Задача 1. Петя написал на доске двузначное число, состоящее из различных цифр. Вася прибавил к числу Пети обе цифры этого числа и результат также написал на доске. Оказалось, что число Васи состоит из тех же цифр, что и число Пети. Приведите пример числа, которое мог написать Петя.

Ответ: 45.

Замечание. Это единственно возможный ответ. Действительно, число поменялось, поэтому первая цифра (старший разряд) увеличилась, а вторая на столько же уменьшилась. При этом прибавил Вася не более 18, поэтому первая цифра увеличилась на 1 или на 2. В первом случае число увеличилось на $10-1=9$; цифры числа тогда отличаются на 1, поэтому само исходное число равно 45. Во втором случае число увеличилось на $20-2=18$. Тогда исходное число могло быть только 99, а это невозможно.

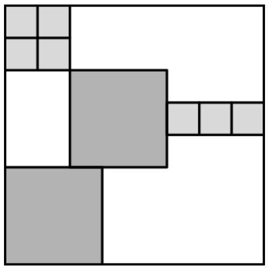
Критерии.

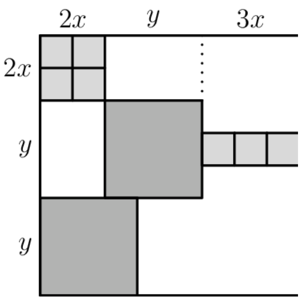
7 б. Приведён верный ответ.

7 б. В качестве ответа указано число Васи, а именно — 54.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. Из квадрата со стороной 16 см вырезали 7 одинаковых маленьких квадратов и 2 одинаковых больших квадрата так, как показано на рисунке. Найдите длину стороны маленького квадрата. (Не забудьте обосновать ответ.)





Ответ: 2 см.

Решение. Обозначим длину маленького квадрата за x см, а длину большого — за y см. Рассмотрим горизонтальную сторону исходного квадрата (см. рис. слева) и составим уравнение $16=2x+y+3x$. Рассмотрим вертикальную сторону и составим уравнение $16=2x+y+y$. Отсюда ясно, что $3x=y$. Заменив y на $3x$ в любом из уравнений, получаем $16=8x$, откуда $x=2$.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

6 б. В решении допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения.

Следующие два критерия суммируются.

4 б. В решении сформулированы утверждения, эквивалентные уравнениям $16=2x+y+3x$ и $16=2x+y+y$, но дальнейших продвижений нет. Если присутствует только одно утверждение, то ставить 2 балла.

3 б. Приведён верный ответ.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. Поезд из Столицы в город Дальний едет 4 дня. В первый день он проходит 40% всего пути, во второй день — ещё 150 км, в третий день — 30% от *оставшегося* пути и ещё 120 км, и в четвёртый день поезду остаётся проехать последние 90 км. Какое расстояние между Столицей и Дальним?

Ответ: 750 км.

Решение. Рассмотрим конец пути. Заметим, что $90 + 120 = 210$км — это 70% пути, оставшегося к третьему дню, то есть всего к третьему дню оставалось 300км. Тогда ко второму дню оставалось 450км, и это составляет 60% от всего пути. Отсюда ясно, что 40% пути, которые поезд прошёл за первый день — это 300км. Всего путь составил 750км.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

5 б. Составлено уравнение, приводящее к верному ответу, например, $0{,}7 \cdot (0{,}6x - 150) - 120 = 90$, но дальше допущена арифметическая ошибка, либо уравнение не решено.

Не более 3 б. В решение рассматривается, что в третий день пройдено 30% не от оставшегося пути, а от всего пути.

3 б. Приведён только верный ответ.

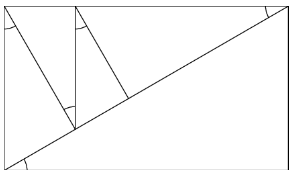
2 б. Присутствует идея рассуждения “с конца”, но отсутствует верное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

За вычислительные ошибки в верном в целом решении, не повлиявшие на его результат, штраф от 0 до 2 баллов, в зависимости от степени грубости ошибок.

Задача 4. Приведите пример прямоугольника, который можно разрезать на пять треугольников таких, что у каждого из них есть хотя бы один угол $30°$. (Необходимо предъявить способ разрезания этого прямоугольника.)

Ответ: Достроим прямоугольный треугольник с острым углом $30°$ до прямоугольника, а потом несколько раз доразобьём имеющиеся треугольники высотами. Например, так:



Примечание: Существует бесконечное количество примеров.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

7 б. Размеры прямоугольника явно не указаны, но их легко вывести (например, половина прямоугольника является прямоугольным треугольником с заданным углом).

3 б. Указан прямоугольник, который можно разрезать на пять треугольников таких, что у каждого из них есть хотя бы один угол $30°$, но способ разрезания не указан.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Денис решил посчитать все машины, припаркованные во дворе. Он утверждает, что иномарок во дворе на 11 больше, чем отечественных машин, а красных машин во дворе на 8 больше, чем синих. Могло ли так оказаться, что все машины во дворе либо красные, либо синие? (Машины бывают двух видов: иномарки и отечественные.)

Ответ: не могло.

Решение. Обозначим количество отечественных машин за x, тогда иномарок будет $x + 11$. В сумме получаем $2x + 11$; это означает, что общее число машин нечётно.

Предположим, что во дворе только красные и синие машины. Теперь обозначим количество красных машин за y. Тогда синих будет $y - 8$. Всего красных и синих машин получается $2y - 8$, то есть чётно. Противоречие. Следовательно, должны найтись машины других цветов.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

Решение задачи состоит из двух утверждений: иномарок и отечественных машин суммарно нечётно, красных и синих машин суммарно чётно.

7 б. Сформулированы и доказаны оба утверждения.

Если решение не полное, то за каждое доказанное утверждение ставится 3 балла, за каждое сформулированное и недоказанное утверждение ставится 2 балла.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

За вычислительные ошибки в верном в целом решении, не повлиявшие на его результат, штраф от 0 до 2 баллов, в зависимости от степени грубости ошибок.

Задача 6. У Сладкоежки есть 10 сундуков конфет, причём в любых двух из них количество конфет различно. Однажды на улице была плохая погода, поэтому Сладкоежка за раз съел по несколько конфет из каждого сундука. Оказалось, что количество конфет в каждом сундуке уменьшилось либо в два, либо в три, либо в четыре раза. Сразу после, Сладкоежка записал к себе в блокнот, сколько конфет осталось в каждом из сундуков. Какое наименьшее количество различных чисел он мог записать?

Ответ: четыре.

Решение. Сначала докажем, что трёх или менее сундуков с различным количеством конфет получится не могло. Действительно, предположим, что после уменьшения в сундуках оказалось только x, y или z конфет (если различных значений меньше, то какое-то из этих значений может не встречаться). Тогда до уменьшения в сундуках могло быть $2x$, $3x$, $4x$, $2y$, $3y$, $4y$, $2z$, $3z$, $4z$ конфет. Это всего девять различных значений, что противоречит условию.

Осталось привести пример для четырёх значений. Если у Сладкоежки было 2, 3, 4, 6, 9, 12, 10, 15, 20, 8 конфет в сундуках, то после уменьшения могло получится соответственно 1, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 4 конфет — четыре различных значения.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

4 б. Доказано, что трёх или менее сундуков с различным количеством конфет получится не могло, но не приведён пример для четырёх значений.

4 б. Приведён пример для четырёх значений, но не доказано, что трёх или менее сундуков с различным количеством конфет получится не могло.

0 б. Приведён только верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.