**Всероссийская олимпиада школьников по математике**
**Муниципальный этап**

# 8 класс. Решения

**Задача 1.** Петя выписал на доску пятизначное число, которое делится на 99. А Вася смог вычеркнуть из этого числа одну цифру так, что получившееся четырёхзначное число тоже делится на 99. Приведите пример числа, которое мог выписать Петя, и укажите, какую цифру в нём мог вычеркнуть Вася.

*Ответ:* 99000. Вася мог вычеркнуть любой ноль.

*Замечание.* Существует множество примеров. Из соображений делимости на 9 ясно, что вычёркиваемая цифра — всегда либо 0, либо 9.

*Критерии.*

*7 б.* Приведён верный ответ, а также показано, какую цифру надо вычеркнуть.

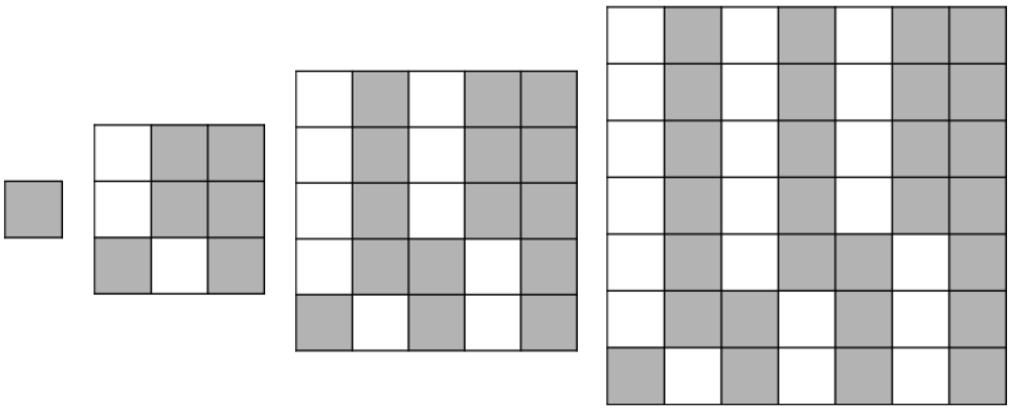
*6 б.* Приведён верный ответ, но не показано, какую цифру надо вычеркнуть.

*0 б.* Задача не решена или решена неверно.

**Задача 2.** В первом столбце таблицы $n \times n$ закрасили одну клетку, во втором столбце — две, в третьем — три, …, в столбце номер $n$ закрасили $n$ клеток. При каких $n$ от $1$ до $8$ могло так оказаться, что во всех строках закрашено одинаковое количество клеток?

*Ответ:* при $n = 1,3,5,7$.

*Решение.* Из условия следует, что число закрашенных клеток должно быть кратно количеству строк, то есть $n$. С другой стороны, число закрашенных клеток — это сумма чисел от $1$ до $n$, то есть $1,3,6,10,15,21,28,36$ для $n = 1,2,3,4,5,6,7,8$ соответственно. Легко видеть, что при чётных $n$ эта сумма на $n$ не делится. При нечётных $n$ нетрудно построить пример: рассмотрим столбцы с $k$ и с $n-k$ закрашенными клетками, поставим эти столбцы рядом и закрасим в них клетки так, чтобы в каждой строке оказалось ровно по одной закрашенной клетке из рассматриваемой пары столбцов. Последний столбец закрасим целиком.



*Критерии.*

*7 б.* Приведено полное обоснованное решение.

Следующие два критерия суммируются

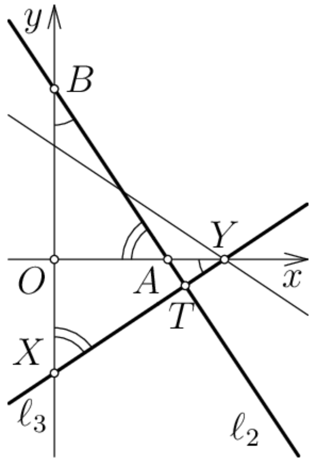
*4 б.* Для чётных $n$ доказано, что не существует такого способа раскрасить клетки. Если присутствует доказательство только для некоторых чётных, то за каждый разобранный случай (из четырёх) ставится 1 балл.

*3 б.* Приведены примеры для нечётных $n$. Если приведены не все примеры, то за каждый пример (кроме $n = 1$) ставится 1 балл.

*2 б.* Приведён только верный ответ, но отсутствует обоснование. Не суммируется с другими критериями.

*0 б.* Задача не решена или решена неверно.

**Задача 3.** Прямая $\ell_1$ проходит через точки с координатами $(b; 0)$ и $(0; a)$, а прямая $\ell_2$ проходит через точки с координатами $(a; 0)$ и $(0; b)$, причём $b > a > 0$. Докажите, что если прямую $\ell_1$симметрично отразить относительно оси $Ox$, то полученная прямая будет перпендикулярна прямой $\ell_2$.




*Решение.* Отражённая прямая — обозначим её $\ell_3$ — проходит через точки $(b; 0)$ и $(0; -a)$. Обозначим начало координат за $O$ и введём точки с координатами $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $X(0; -a)$, $Y(b; 0)$. Тогда прямая $\ell_2$ совпадает с $AB$, а прямая $\ell_3$— с $XY$. Пусть также $T$ — точка пересечения прямых $\ell_2$ и $\ell_3$.

Заметим, что треугольники $OAB$ и $OXY$ равны как прямоугольные с равными соответствующими катетами, то есть $\angle OXY = \angle OAB$. С другой стороны, $\angle OXY = 90° - \angle OYX$. Тогда в треугольнике $AYT$ углы $A$ и $Y$ дополняют друг друга до 90°; значит, угол $T$ равен 90°. Это и требовалось доказать.

*Замечание.* На самом деле, достаточно заметить, что угловой коэффициент прямой $\ell_3$ равен $\frac{a}{b}$, а угловой коэффициент $\ell_2$ равен $-\frac{b}{a}$. Так как их произведение равно $-1$, то прямые перпендикулярны.

*Критерии.*

*7 б.* Приведено полное обоснованное решение.

За использование без доказательства факта, что прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда угловые произведение угловых коэффициентов равно $-1$,, баллы не снимаются.

*4 б.* Доказано равенство треугольников, но дальнейших продвижений нет.

*0 б.* Задача не решена или решена неверно.

**Задача 4.** Может ли сумма первых нескольких ненулевых степеней двойки (вида $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^N$) равняться сумме нескольких подряд идущих нечётных чисел?

*Ответ:* не может.

*Решение.* Заметим, что сумма первых $N$ ненулевых степеней двойки чётна, но на 4 не делится. Докажем, что сумма подряд идущих нечётных чисел такое значение принимать не может.

Действительно, если сумма нечётных чисел чётна, то их самих должно быть чётное количество. Разобьём числа на пары: первое со вторым, третье с четвёртым, …, предпоследнее с последним. Тогда, если одно из чисел в паре равно $2k + 1$, то второе равно

$2k+3$(и наоборот). Таким образом, их сумма равна $4k+4$, то есть кратна четырём. Получается, что сумма всех наших нечётных чисел кратна четырём. Противоречие.

*Критерии.*

*7 б.* Приведено полное обоснованное решение.

Следующие два критерия суммируются.

*4 б.* Доказано, что сумма подряд идущих нечётных чисел либо нечётна, либо делится на 4. Если это факт сформулирован, но не доказан, то ставить 2 балла.

*2 б.* Сформулировано, что сумма первых нескольких степеней двойки делится на 2, но не делится на 4.

*0 б.* Задача не решена или решена неверно.

**Задача 5.** Волшебная страна населена эльфами и гномами. Известно, что по понедельникам эльфы всегда говорят правду, а по вторникам всегда врут, а гномы — наоборот. В понедельник каждый из жителей страны сказал: «У меня знакомых эльфов на 1 больше, чем знакомых гномов», а во вторник — «Среди незнакомых мне жителей страны эльфов на 1 больше, чем гномов». Могло ли так оказаться, что в волшебной стране 2019 жителей? (Все знакомства взаимны, то есть любые два жителя либо оба знакомы друг с другом, либо нет.)

*Ответ:* не могло.

*Решение.* Заметим, что в понедельник все эльфы сказали: «У меня знакомых эльфов на 1 больше, чем знакомых гномов», и это правда. Получается, у всех эльфов нечётное число знакомых. Во вторник все гномы сказали правду: «Среди незнакомых мне жителей страны эльфов на 1 больше, чем гномов»; тогда каждый гном не знает нечётное количество жителей страны, соответственно, знает тоже нечётное количество жителей (в сумме знакомых и незнакомых у каждого будет 2018).

Предположим, что в стране живёт 2019 жителей. Сложим между собой количество знакомых у них всех. С одной стороны, должно получиться нечётное число, так как сумма 2019 нечётных чисел нечётна. С другой стороны, это число должно быть чётным, так как оно равно удвоенному числу пар жителей, знакомых между собой (если А знаком с Б, то Б знаком с А). Противоречие. Следовательно, жителей не могло быть 2019 (аналогично можно доказать, что их количество не могло быть нечётным).

*Замечание.* Последний шаг решения — это хорошо известная «лемма о рукопожатиях»: сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу рёбер, и значит, чётна.

*Критерии.*

*7 б.* Приведено полное обоснованное решение.

*7 б.* Полное решение, в котором используется лемма о рукопожатиях без доказательства.

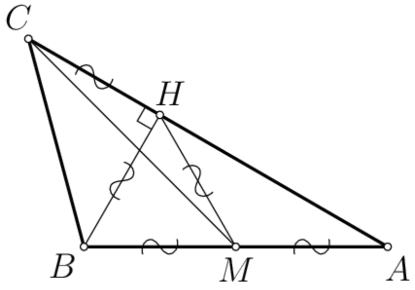
*2 б.* Доказано, что у каждого эльфа нечётное количество знакомых.

*3 б.* Доказано, что у каждого гнома нечётное количество знакомых

*0 б.* Задача не решена или решена неверно.

**Задача 6.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $CM$. Известно, что угол $BAC$ равен $30°$, а угол $BMC$ равен $45°$.Чему равен угол $MCB$?

*Ответ:* $30°$.




*Решение.* Опустим высоту $BH$ на сторону $AC$. Заметим, что $HM$— медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника $ABH$, откуда имеем $AM = BM = HM$. Треугольник $AMH$ равнобедренный с углами при основании в $30°$. Тогда его внешний угол $BMH$ равен $60°$, откуда следует, что треугольник $BHM$ равносторонний.

Имеем $\angle MHC = 150°$, $\angle HMC = \angle HMB - \angle CMB = 15°$, откуда $\angle HCM = 15°$. Получаем, что треугольник $HCM$ равнобедренный, то есть $HC = HM = HB$. Теперь ясно, что $BHC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник, и поэтому $\angle HCB = 45°$. Тогда искомый угол равен $\angle MCB = \angle HCB - \angle HCM = 30°$.

*Критерии.*

*7 б.* Приведено полное обоснованное решение.

*2 б.* Проведена высота $BH$, но дальнейших продвижений нет.

*1 б.* Приведён верный ответ, но нет дальнейших продвижений.

*0 б.* Задача не решена или решена неверно.