Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

9 класс. Решения

Задача 1. В ряд стоят 10 клеток. Можно ли в одну клетку посадить одного кролика, в другую — двух, в третью — трёх, …, в десятую — десять так, чтобы в любых трёх подряд идущих клетках было не более 15 кроликов?

Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что это возможно. Тогда суммарное количество кроликов равно $1 + 2 + \dots + 10 = 55$. С другой стороны, рассмотрев первые девять клеток как три последовательные тройки, мы получим, что в них не более 45 кроликов. Значит, в последней клетке должно быть 10 кроликов. Аналогично рассмотрев последние девять клеток, получим, что и в первой клетке сидят 10 кроликов. Это противоречит условию.

Критерии.

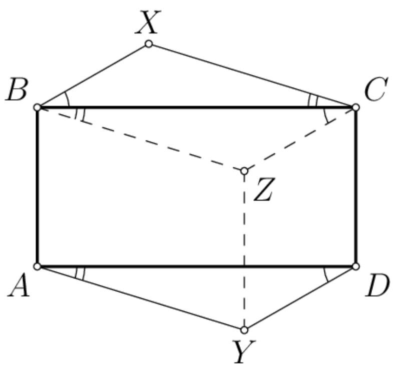
7 б. Приведено полное обоснованное решение.

5 б. Доказано, что кроликов в последней (или в первой) клетке ровно 10.

0 б. Приведён верный ответ, но нет дальнейших продвижений.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. На сторонах BC и AD прямоугольника ABCD во внешнюю сторону построены равные тупоугольные треугольники BXC и DYA: $BX = DY$, $XC = YA$, BXC и DYA — равные тупые углы. Докажите, что шестиугольник $ABXCDY$ можно разрезать на три параллелограмма.



Решение. Перенесём треугольник DYA параллельно так, чтобы его сторона AD совместилась с BC; иначе говоря, построим во внутреннюю сторону нашего прямоугольника треугольник CZB, равный DYA и BXC. Ясно, что шестиугольник разрезается на четырёхугольники $XCZB$, $DYZC$ и $ABZY$; осталось убедиться, что они параллелограммы. Действительно, равенство противоположных сторон четырёхугольника $XCZB$ следует из равенства треугольников BXC и CZB. У четырёхугольника $ABZY$ равны стороны AY и BZ; их параллельность следует из того, что соответственные углы $\angle ABZ = 90° - \angle ZBC$ и $\angle BAY = 90° + \angle YAD = 90° + \angle ZBC$ дополняют друг друга до $180°$. Аналогично получаем равенство и параллельность сторон $DYZC$.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

6 б. Показан способ разрезания, но нет обоснования его корректности.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. У нумизмата есть 2019 различных по весу монет. Известно, что любые 20 монет из его коллекции тяжелее, чем любые 19 монет из оставшихся. Могло ли так оказаться, что есть 37 монет таких, что 18 из них тяжелее, чем оставшиеся 19?

Ответ: не могло.

Решение. Предположим, что такое возможно, то есть мы можем выделить две группы монет A и B из 18 и 19 монет соответственно, так, что A тяжелее B. Из всех оставшихся монет выделим две монеты a и b такие, что a тяжелее b. Тогда объединение $A + a$ будет тяжелее объединения $B + b$. Однако в $A + a$ всего 19 монет, а в $B + b$ их 20. Получаем противоречие с условием.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. Число $n!$ — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Какое наименьшее количество чисел (хотя бы одно) можно выбрать из набора $30!, 31!, \ldots, 60!$ так, чтобы их произведение было равно квадрату некоторого натурального числа?

Ответ: 2.

Решение. Сначала покажем, что если мы выберем одно число $n!$, то у нас ничего не выйдет. Для этого обратим внимание на то, что числа 29 и 31 — простые. Если $n \geqslant 31$, то в разложение нашего факториала на простые множители число 31 будет входить в первой степени, и квадратом факториал быть не может. Если же $n \leqslant 30$, то аналогичная проблема возникнет со степенью вхождения числа 29.

А два факториала выбрать можно: $48! \cdot 49! = (48!)^2 \cdot 49 = (48! \cdot 7)^2$.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

3 б. Доказано, что никакое из указанных чисел не является точным квадратом.

2 б. Доказано хотя бы для половины чисел, что они не являются точными квадратами.

3 б. Приведён верный пример для двух чисел. Если отсутствует обоснование примера, то снимать 1 балл.

0 б. Приведён верный ответ, но нет дальнейших продвижений.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Из Оксфорда в Кембридж одновременно вылетело три почтовых голубя, каждый из них, доставив послание, сразу же полетел обратно. Первый голубь летел быстрее всех и встретил на обратном пути второго голубя в 36 км от Кембриджа, а третьего голубя — в 50 км от Кембриджа. Второй голубь вторым доставил послание и встретил третьего голубя в 16 км от Кембриджа. Чему равно расстояние между Оксфордом и Кембриджем?

Ответ: 120 км.

Решение. Пусть S — искомое расстояние (в километрах), a — отношение скорости первого голубя к скорости второго, b — отношение скорости второго к скорости третьего, ab — отношение скорости первого к скорости третьего.

К моменту встречи первого голубя со вторым они пролетели соответственно $S+36$ и $S-36$ километров. Отношение расстояний равно отношению скоростей, поэтому $(S+36):(S-36)=a$. Аналогично получаем $(S+16):(S-16)=b$, $(S+50):(S-50)=ab$. Перемножив первые два равенства и разделив на третье, мы приходим к $\frac{(S+36)(S+16)(S-50)}{(S-36)(S-16)(S+50)}=1$.

Домножение на знаменатель и раскрытие скобок даёт нам уравнение $S^3+2S^2-2024S+28800=S^3-2S^2-2024S+28800$,

которое после сокращения становится квадратным $4S^2=57600$ с корнями $S=\pm 120$.

Критерии.

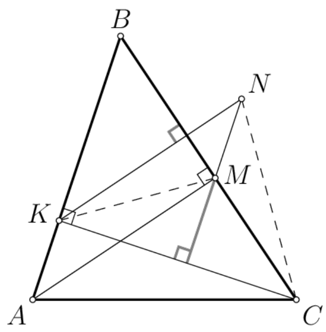
7 б. Приведено полное обоснованное решение.

6 б. В целом верное решение, но допущена арифметическая ошибка.

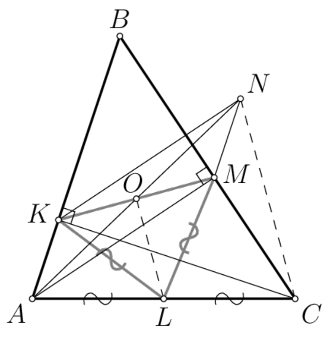
2 б. Приведён верный ответ, но нет дальнейших продвижений.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. Отмечена точка N такая, что $AMNK$ — параллелограмм. Докажите, что прямая CN перпендикулярна KM.



Решение. Заметим, что из параллельности сторон параллелограмма следует $MN \perp CK$ и $KN \perp BC$. Это означает, что прямые MN и BC содержат высоты треугольника CKN, проведённые к сторонам CK и KN соответственно. Тогда их пересечение — точка M — содержится в высоте и к третьей стороне, CN, что и означает $KM \perp CN$.



Другое решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $AKNM$, а L — середина AC. Нетрудно заметить, что OL — средняя линия треугольника ANC. Тогда нам достаточно доказать перпендикулярность OL и KM.

KL и ML — медианы в прямоугольных треугольниках AKC и AMC соответственно, поэтому эти отрезки равны половине их общей гипотенузы AC. Получается, LO — медиана в равнобедренном треугольнике KLM, поэтому является также и высотой.

Критерии.

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

3 б. Доказана равнобедренность треугольника KLM, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Задача сведена к доказательству перпендикулярности OL и KM.

0 б. Задача не решена или решена неверно.